



TITLE:

曲面の bubbling と熱核の収束 joint work with 加須栄篤(調和写像と部分多様体の幾何学)

AUTHOR(S):

久村, 裕憲

CITATION:

久村, 裕憲. 曲面の bubbling と熱核の収束 joint work with 加須栄篤(調和写像と部分多様体の幾何学). 数理解析研究所講究録 1997, 995: 40-50

ISSUE DATE:

1997-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/61221>

RIGHT:

曲面の bubbling と熱核の収束

joint work with 加須崇篤 (大阪市大・理)

静岡大学・理学部 久村 裕憲

構成

§1. スペクトル距離

§2. branched surface 上の Laplacian

§3. 得られた結果と証明の outline

§1. スペクトル距離

このセクションでは、コンパクト連結リーマン多様体の間に、熱核を用いて、スペクトル幾何に密接した形で、距離を導入する。

(M, g) をコンパクト連結リーマン多様体, w を M 上の正値 C^∞ 関数とし、簡単のため、 $\int_M w dv_g = 1$ という仮定をおく。(ここで dv_g は (M, g) のリーマン測度)。このとき $L_w u \stackrel{\text{def}}{=} \Delta u + \langle \nabla \log w, \nabla u \rangle$ ($u \in C^\infty(M)$) という微分作用素 L_w を考える。 L_w は 2 次形式

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v) &= \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle w dv_g = - \int_M (L_w u) v w dv_g \\ &\quad (u, v \in C^\infty(M)) \end{aligned}$$

に associate していること, また, $W = \text{constant}$ のときには L_W はラプラシアンに他ならないことに注意したい。

(以下, $W = \text{constant}$, $L_W = \Delta$ と思, て, 本講を讀んでいただいても構わない。) L_W は $L^2(M, \mu^W \stackrel{\text{def}}{=} W dv_g)$ 上の本質的自己共役作用素である。従, て L_W の closure $\overline{L_W}$ は自己共役作用素だが, それを簡単に L_W と書く。 L_W は discrete spectrum

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \nearrow \infty$$

を持つ。また, L_W の $L^2(M, \mu^W)$ 上の熱核を $P_W(t, x, y)$ と書く。

定義 (M, g_M, ν) と (N, g_N, μ) を 2 つの上のようなリーマン多様体と関数の組とする。このとき, map $h: M \rightarrow N$ が ε -spectral approximation とは,

$$\sup \left\{ e^{-(t+\frac{1}{t})} |P_\nu(t, x, y) - P_\mu(t, h(x), h(y))|; \begin{matrix} \forall t > 0 \\ \forall x, y \in M \end{matrix} \right\} < \varepsilon$$

が成立つときいう。そして,

$$SD((M, g_M, \nu), (N, g_N, \mu))$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \begin{matrix} \exists f: M \rightarrow N & \varepsilon\text{-spectral approximation} \\ \exists h: N \rightarrow M & \text{"} \end{matrix} \right\}$$

とおき, これを (M, g_M, ν) と (N, g_N, μ) の間のスペクトル距離と呼ぶ。次の補題よりこれを距離と呼んで差しつかえない。

補題 1. $SD((M, g_M, v), (N, g_N, w)) = 0$

$\Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow N$ homeomorphism s.t.

$$\begin{cases} P_v(t, x, y) = P_w(t, f(x), f(y)) & \forall t > 0 \quad \forall x, y \in M \quad \dots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_* \mu^v = \mu^w & \dots ② \end{cases}$$

ここぞ、Varadhan の定理

$$\lim_{t \downarrow 0} t \log P_v(t, x, y) = - \frac{d^2(x, y)}{4}$$

に注意すれば、 f は isometry であり、 $f^*w = v$ も成立つ。

注意 1. $\lim_{t \downarrow 0} P_v(t, x, y) = \delta_x(y)$ を使うと ① から ② が導き出されるので ① が本質的である。

この補題と注意により、① を満たす f が存在するとき、

$(M, g_M, v) \sim (N, g_N, w)$ として同値関係を導入すれば、

スペクトル距離 SD は $\{(M, g_M, v) \mid \text{as above}\} / \sim$ 上に距離構造を導入することが分る。

SD について次の命題は基本的である。

命題 1. $a > 0, \nu > 0, \tau > 0$ が与えられたとき、

$$\{(M, g, v) \mid \text{as above}, P_v(t, x, x) \leq a/t^\nu, \forall x \in M \quad \forall t \in (0, \tau]\} / \sim$$

は SD に関して ν コンパクト (全有界) である。

注意 2. 熱核が上の命題1のよう な形の upper bound を持つ

ことと、Nash の不等式

$$\|\phi\|_2^{2+\frac{4}{\nu}} \leq A \{ \|\nabla \phi\|_2^2 + \tau^{-1} \|\phi\|_2^2 \} \|\phi\|_1^{\frac{4}{\nu}}, \quad \forall \phi \in C^\infty(M)$$

が成立することとは同値である。また $\nu > 2$ のときは、これは

Sobolev の不等式

$$\|\phi\|_{\frac{2\nu}{\nu-2}}^2 \leq A' \{ \|\nabla \phi\|_2^2 + \tau^{-1} \|\phi\|_2^2 \}$$

とも同値である。そして、Nash の不等式から、(番号

以上のすべての) の固有値の上下からの評価や、 M の直

径の上からの評価が、 A, τ, ν のみに depend する定数によ

って与えられる。(詳細は [K-K II] 参照)。

§ 2. branched surface with bounded mean curvature の Laplacian について

(M, g) を 2次元コンパクト連結リーマン多様体, (\bar{M}, \bar{g})

を完備リーマン多様体とし、 $f: M \rightarrow \bar{M}$ を有界な平均曲率

(ベクトル) H_f を持つ weakly conformal map とする。こ

で weakly conformal とは

$$\exists \varphi \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad f^* \bar{g} = \varphi g, \quad \varphi \neq 0$$

が成立することをいい、そして、 H_f が有界とは、

$$\tau(f, g) = \varphi H_f, \quad \|H_f\|_\infty \leq C$$

が成立することを意味するものとする。ここで、 $\tau(f, g)$ は $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ の tension field を表す。そして、任意の $z_0 \in M$ に対しある $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ とある $a \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ が存在して、

$$f_z(z) = a(z - z_0)^m + o(|z - z_0|^m) \text{ as } z \rightarrow z_0$$

と書け、さらに、 $f_z(z_0) = 0$ ならば $m \geq 1$ が成立するという Hartman - Winter の定理より、branch points は有限個しかないのが分る。そこで、 B を f の branch points の集合 i.e.

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid df(x) = 0\}$$

とおき、 (M, f^*g) 上のラフシアニを次で定義する。

$$\text{Dom}(\Delta) = \{u \in C^2(M \setminus B) \mid u, |\nabla u|, \Delta u \in L^2(M, dv_{f^*g})\}$$

$$\Delta u = \text{metric } f^*g \text{ に関する } u \text{ の Laplacian } (u \in \text{Dom}(\Delta))$$

このとき次が成立する。

補題 2. 上の Δ は本質的自共役 on $L^2(M, dv_{f^*g})$ である。

その閉包 $\bar{\Delta}$ を単に Δ と書き、 Δ の熱核を $p(t, x, y)$ と書く。

Δ は discrete spectrum

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \uparrow \infty$$

を持つ。 $p(t, x, y)$ は $\{x \in M \mid \text{dist}(B, x) > r\}$ 上の

Dirichlet heat kernel $p_r(t, x, y)$ の $r \downarrow 0$ としたときの

極限に等しく、

$$\begin{cases} \int_M p(t, x, y) dv_{f+\bar{g}}(y) = 1 \\ \int_M |\nabla_y^{f+\bar{g}} p(t, x, y)|_{f+\bar{g}}^2 dv_{f+\bar{g}}(y) < +\infty \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

が成立つ。さらに、 $p(t, x, y)$ 及び Δ の固有関数は branch points まで込めて M 上連続である。

注意 3. $\lambda_1 > 0$ は、branched manifold 上の熱核の lower bound の導出で使い、また、保存則 $\textcircled{3}$ は次のセクションの定理で、極限において、熱核が分解することを用いる。補題 2 は「連続性」を除いて本質的に [Li-Tian] による。

§ 3. 得られた結果

次が得られた結果である。

定理 (加須栄一久村)

(M, g) を 2 次元コンパクト連結リーマン多様体, (\bar{M}, \bar{g}) を完備リーマン多様体で

$$\bar{M} \text{ の断面曲率 } \leq K$$

$$\bar{M} \text{ の単射半径 } \geq \ell$$

を満たすものとする。(ここで $K \geq 0$, 及び $\ell > 0$ は定数)

また、 $f_n: M \rightarrow \bar{M}$ は (nonconstant) weakly conformal map の列で、

$$\begin{cases} \|H_{f_n}\|_{\infty} \leq \delta \\ \text{Area}(M, f_n^* \bar{g}) \leq b \\ \exists 0 \in M \text{ s.t. } \{f_n(0) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ は } \bar{M} \text{ の有界集合} \end{cases}$$

を満たすものとする。ここで H_{f_n} は f_n の平均曲率ベクトル、 δ, b は n によらない定数。

このとき、次の (1), (2), (3), (4) が成立つ。

- (1) branched surfaces $(M, g_n \stackrel{\text{def}}{=} f_n^* \bar{g}, \mu_{g_n} \stackrel{\text{def}}{=} dV_{g_n} / \text{Area}(M, g_n))$ の熱核 p^{g_n} は

$$p^{g_n}(t, x, x) \leq a/t \quad (\forall t \in (0, \tau], \forall x \in M)$$

を満たす。ここで、 $a, \tau > 0$ は K, ν, δ, b のみによる定数。特に

$$\text{diam}(M, g_n) \leq C_1(K, \nu, b, \delta)$$

$$\exists i_0 = i_0(K, \nu, b, \delta) \quad \forall i \geq i_0 :$$

$$C_2(K, \nu, b, \delta, i) \leq \lambda_i \leq C_3(K, \nu, b, \delta, i)$$

が成立つ。また、

$$\text{Area}(M, g_n) \geq C_4(K, \nu, b, \delta) > 0$$

も成立つ。

- (2) 上の状況において、一般に bubbling という現象が起きるがそのとき 'energy loss' は起きない。すなわち (適当に部

分列を取れば)

$\exists \varphi_i : S^2 \rightarrow \bar{M} : C^{1,\alpha} (\forall \alpha \in (0,1))$ の conformal branched immersion with bounded mean curvature ($|H_{\varphi_i}|_{\infty} \leq b$)

($i = 1, 2, \dots, k$)

及 u''

$\exists f_{\infty} : M \rightarrow \bar{M} : C^{1,\alpha} (\forall \alpha \in (0,1))$ の conformal branched immersion with bounded mean curvature ($|H_{f_{\infty}}|_{\infty} \leq b$) として
 $M \setminus \Sigma$ での f_n の limit map
 (Σ は M 上の bubble points の集合)

が存在して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Area}(M, f_n^* \bar{g}) = \text{Area}(M, f_{\infty}^* \bar{g}) + \sum_{i=1}^k \text{Area}(S^2, \varphi_i^* \bar{g})$$

が成立つ。

(3) 各 bubble point として

(base map による bubble point の像)

= (bubble map による south pole の像)

が成立つ。

(4) (部分列を取り) (2) が成立つとき、 (M, g_n, μ_{g_n}) はスペクトル距離 SD の意味で次の (X, η, P_X) に収束する: ここで X は連結距離空間、 η は X 上のラドン測度、 P_X は $L^2(X, \eta)$

上の regular Dirichlet form に associate する C^0 -semigroup の積分核で、 η の support は次のように分解する:

(i) $f_\infty \neq \text{constant map}$ のとき.

$\text{supp } \eta = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$ (直和) となり、

位相同型 $F: (M, f_\infty^* \bar{g}) \rightarrow X$, $F_i: (S^2, \varphi_i^* \bar{g}) \rightarrow X$ が存在して次の (a), (b) が成立つ。

(a) $F(M) = \Sigma_0$,

$$F_* \left(\frac{a_\infty}{V_\infty} \mu_{f_\infty^* \bar{g}} \right) = \chi_{\Sigma_0} \cdot \eta,$$

$$\frac{V_\infty}{a_\infty} p_{f_\infty^* \bar{g}}(t, x, y) = P_X(t, F(x), F(y)) \quad \forall t > 0, \forall x, y \in M$$

ここで、 $V_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Area}(M, f_n^* \bar{g})$, $a_\infty := \text{Area}(M, f_\infty^* \bar{g})$

とおいた。

(b) $F_i(S^2) = \Sigma_i$,

$$F_{i*} \left(\frac{a_i}{V_\infty} \mu_{\varphi_i^* \bar{g}} \right) = \chi_{\Sigma_i} \cdot \eta,$$

$$\frac{V_\infty}{a_i} p_{\varphi_i^* \bar{g}}(t, x, y) = P_X(t, F_i(x), F_i(y)) \quad \forall t > 0, \forall x, y \in S^2$$

($i = 1, 2, \dots, k$)

ここで $a_i := \text{Area}(S^2, \varphi_i^* \bar{g})$ とおいた。

特に、 $(M, g_n = f_n^* \bar{g})$ の (うづらシアンの) オイラー固有値は、これら $k+1$ 個の branched manifolds の (うづらシアンの) 固有値の直和において小さいものから数えて i 番目のものに収束する。

(ii) $f_\infty = \text{constant map}$ のときは、上の (i) で Σ_0, F を除いた

ものが成立つ。

(定理の証明の outline)

(1) は [K-K II] の議論を branched manifold 上で展開することにより得られる。また、(2), (3) は [Parker] の議論が今の場合でも通用することから直ちに O.K. である。(4) は [K-K-O] の議論が branch を許すとどうなるかを調べてチェックすることにより得られる。

参考文献

[Jost] J. Jost, Two-dimensional Geometric Variational problems, John-Wiley & Sons, 1991

[K-K II] 加須栄一久村, Spectral convergence of Riemannian manifolds, II, Tôhoku Math. J. 48 (1996), 71-120.

[K-K-O] 加須栄一久村-小倉, Convergence of heat kernels on a compact manifold, preprint.

[Parker] T.H. Parker, Bubble tree convergence for harmonic maps, to appear in J.D.G.

[Li & Tian] P. Li and G. Tian, On the heat kernel of the Bergman metric on algebraic varieties, preprint

Lecture Notes 2, Geometry and Global Analysis,
July 1993, Tohoku University, 235-251.